Komplexní Doučování pro Vysoké Školy

Lineární algebra - 4MM101, 4MM106

Příklad 1 *S použitím výpočtu hodnosti matice rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů, jestliže:*

$$\vec{x_1} = (2, -3, 5), \quad \vec{x_2} = (1, 0, -2), \quad \vec{x_3} = (1, -7, 9), \quad \vec{x_4} = (-1, 0, 1),$$
$$\vec{x_5} = (1, 2, -3), \quad \vec{x_6} = (2, -1, 0)$$

Řešení 1.
Je zřejmé, že dané vektory obsahují každý 3 složky, jsou tedy ve vektorovém prostoru V_3. V takovém vektorovém prostoru můžeme vybrat nejvýše 3 lineárně nezávislé vektory. Máme-li tedy zkoumat lineární závislost vektorů, jako v tomto případě, pak se můžeme nejprve podívat, kolik vektorů jsme zadali a z jakého vektorového prostoru vektory pocházejí. Pokud máme větší počet vektorů, než je vektorový prostor, pak příklad nemusíme počítat, protože víme, že dané vektory musí být určitě lineárně závislé. Z naší úlohy vyplývá, že máme 6 vektorů z vektorového prostoru V_3, takže bez jakéhokoli výpočtu můžeme říci, že těchto 6 vektorů je lineárně závislých.

Odpověď: Dané vektory jsou lineárně závislé. $\square$

Příklad 2 *V závislosti na reálných parametrech α a β proveďte diskuzi řešitelnosti soustavy lineárních rovnic včetně počtu volitelných neznámých, jestliže*

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -x_1 + \ \ x_2 + \alpha x_3 &= \beta \end{aligned}$$

Řešení 2.
V prvním kroku přepíšeme soustavu rovnic do maticového tvaru jako:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \tag{1}$$

Opět provedeme Gaussovu eliminační metodu, a tak vynásobíme 1. řádek matice (1) číslem -1 a přičteme jej ke 2. řádku a současně přičteme 1. řádek ke 3. řádku, tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & (\alpha+2) & \beta \end{array}\right) \tag{2}$$

Dále vydělíme 2. řádek matice (2) číslem 3, tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & (\alpha+2) & \beta \end{array}\right) \tag{3}$$

V posledním kroku vynásobíme 2. řádek matice (3) číslem -2 a přičteme jej ke 3. řádku, tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & (\beta-2) \end{array}\right) \tag{4}$$

Zde jsme dokončili Gaussovu eliminační metodu, matice je již ve stupňovitém tvaru a můžeme tedy začít diskutovat o řešitelnosti systému, resp. počtu řešení.

- Aby soustava neměla řešení, nemůže být splněna Frobeniova podmínka, což je v našem případě splněno pouze tehdy, je-li hodnost matice soustavy o jedna menší než hodnost rozšířené matice soustavy. Tedy aby hodnost matice soustavy byla 2, pak $\alpha = 0$ a aby hodnost rozšířené matice soustavy byla zároveň 3, tak $\beta \neq 2$.

- Aby soustava rovnic měla přesně jedno řešení, je nutné, aby hodnost matice soustavy byla stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy, jinými slovy aby platila Frobeniova podmínka, a navíc aby tyto hodnosti byly rovny počtu neznámých. V našem případě je počet neznámých 3, takže potřebujeme, aby nevypadl žádný řádek, a tedy parametr $\alpha \neq 0$, bez ohledu na volbu parametru β

- Aby soustava rovnic měla nekonečně mnoho řešení, pak hodnost matice soustavy a zároveň hodnost rozšířené matice soustavy musí být menší než počet neznámých, takže v našem případě je jediná možnost 2 a to je splněno, pokud $\alpha = 0$ a $\beta = 2$.

Odpověď:

- Soustava má 1. řešení: $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$
- Soustava nemá řešení: $\alpha = 0$, $\beta \neq 2$
- Soustava má nekonečně mnoho řešení: $\alpha = 0$, $\beta = 2$

$\square$

Příklad 3 *Z následujíci maticové rovnice vypočtěte neznámou matici* $\boldsymbol{X}$ *a uveďte. pro které matice* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ *se dá matice* $\boldsymbol{X}$ *z této rovnice osamostatnit, jestliže*

$$\mathbf{X} + \mathbf{A} = 3\mathbf{A} - \mathbf{XC}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení 3.
Nejdříve musíme z dané rovnice vyjádřit neznámou matici $\mathbf{X}$. Při všech úpravách, které budeme provádět, musíme mít na paměti následující základní pravidla, a to $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{J}$ a $\mathbf{AJ} = \mathbf{JA} = \mathbf{A}$. Nejprve musíme přehodit všechny neznámé matice $\mathbf{X}$ na jednu stranu a vše ostatní na druhou stranu.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} + \mathbf{XC} &= 4\mathbf{A} - \mathbf{A} \qquad | \; (4\mathbf{A} - \mathbf{A} = 3\mathbf{A}) \\ \mathbf{X} + \mathbf{XC} &= 3\mathbf{A} \\ \mathbf{X}(\mathbf{J} + \mathbf{C}) &= 3\mathbf{A} \qquad\quad | \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{X}(\mathbf{J} + \mathbf{C})(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} &= 3\mathbf{A}(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{X} &= 3\mathbf{A}(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

Vidíme, že matematické úpravy v (5) jsou možné pouze tehdy, pokud existuje inverzní matice $(\mathbf{J} + \mathbf{C})^{-1}$. Ta existuje pouze tehdy, je-li $(\mathbf{J} + \mathbf{C})$ regulární. Pokud by $(\mathbf{J} + \mathbf{C})$ nebylo regulární, pak bychom daný postup nemohli použít. Dále dosadíme matice ze zadání do výsledku pro $\mathbf{X}$, přičemž $\mathbf{J}$ považujeme za jednotkovou matici, tedy:

$$\mathbf{X} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \tag{6}$$

Dále upravíme (6) vynásobením první matice číslem 3 a současne udeláme součet matic v závorce, t.j:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{7}$$

Výslednou inverzní matici řešíme přesně jako v příkladu 14 s tím rozdílem, že tentokrát se jedná o matici 2x2[1]., t.j.:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Výsledek (9) dosadíme do (7) a dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

[1]Inverzní matici obecní matice 2x2 vypočítáme takto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{8}$$

Odpověď: $\mathbf{X} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ $\square$

Příklad 4 *Určete charakteristická (vlastní) čísla matice* $\mathbf{A}$, *jestliže:*

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení 4.
Charakteristické nebo jinými slovy vlastní čísla matice jsou řešením následující rovnice:

$$det(A - \lambda J) = 0 \tag{11}$$

kde A je daná matice, J je jednotková matice a λ jsou naše vlastní čísla, která potřebujeme určit[2]. V dalším kroku dosadíme známé hodnoty do rovnice pro, tedy:

$$\begin{aligned} det\left[\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] &= 0 \\ det\left[\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] &= 0 \\ det\left[\begin{pmatrix} (1-\lambda) & -9 \\ 5 & (7-\lambda) \end{pmatrix}\right] &= 0 \\ \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -9 \\ 5 & (7-\lambda) \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Determinant (12) vypočítáme pomocí křížového pravidla pro výpočet determinantu 2x2 (viz. rovnice (**??**)), tedy:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -9 \\ 5 & (7-\lambda) \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(7-\lambda) + 45 &= 0 \\ 7 - \lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 45 &= 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 52 &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

V posledním kroku řešíme výslednou kvadratickou rovnici, tedy:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 8\lambda + 52 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{+8 \pm \sqrt{64-208}}{2} \\ \lambda_{1,2} &= \frac{+8 \pm \sqrt{-144}}{2} \\ \lambda_1 &= \frac{+8 + \sqrt{-144}}{2} = \frac{8+12i}{2} = 4+6i \\ \lambda_2 &= \frac{+8 - \sqrt{-144}}{2} = \frac{8-12i}{2} = 4-6i \end{aligned} \tag{14}$$

[2] Pokud máme na začátku matici 2x2, musíme spočítat 2 vlastní čísla, pokud by byla matice 3x3, musíme určit 3 vlastní čísla atd. Zároveň, protože počítáme determinant, musí být daná matice určitě čtvercová.

Při určování vlastních čísel je zcela běžné, že spočtěme komplexní řešení, jako v tomto případě.

Odpověď:

- $\lambda_1 = 4 + 6i$
- $\lambda_2 = 4 - 6i \qquad \square$

...

Matematická analýza - 4MM101, 4MM106

Příklad 5 *Vypočtěte limitu posloupnosti*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n}$$

Řešení 5.
Pokud se budeme zabývat limitami, prvním krokem k úspěšnému výsledku je správné dosazení a určení typu limitu. Můžeme získat pouze dva typy: určitý výraz, který je již přímým výsledkem limity a nemusíme limitu dále řešit, nebo získáme neurčitý výraz, který je třeba dále upravit, abychom získali výraz určitý. V prvním kroku tedy nahradíme každé n v argumentu limity nekonečnem, tj:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n} = \frac{\infty^2+\infty+3}{5\infty^3+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \tag{15}$$

Po dosazení jsme dostali limitní výraz $\frac{\infty}{\infty}$. Při výpočtech jsme využili základní charakteristiky práce z nekonečnama jako:

- Součet libovolného kladného nekonečna s jiným kladným nekonečnem je vždy nekonečno.
- Kladné nekonečno umocněno na libovolnou mocninou je vždy kladné nekonečno.
- Součet nebo rozdíl libovolného nekonečna s jiným číslem než nula je vždy nekonečno až na znaménko nekonečna.
- Každé číslo dělené nekonečnem je nula.
- Záporné nekonečno na sudou celou mocninu je vždy kladné nekonečno.
- záporné nekonečno na lichou celou mocninu je vždy záporné nekonečno.
- Každá kladná odmocnina z nekonečna je nekonečno.

Protože nám vyšel neurčitý limitní výraz, použijeme v tomto případě vynímání, protože pokud limitní argument obsahuje pouze n na kladnou celou mocninu pod a nad zlomkovou čarou, pak víme, že by nám vynímání mělo téměř jistě pomoci. Vyjměme vždy nejvyšší mocninu z čitatele a nejvyšší mocninu z jmenovatele, tedy:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^{\cancel{3}1}\left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}\end{aligned} \tag{16}$$

Jakmile provedeme jednu úpravu limity, vždy zkontrolujeme, zda se neurčitý výraz změnil na určitý, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}}{\infty\left(5+\frac{1}{\infty^2}\right)} = \frac{1+0+0}{\infty(5+0)} = \frac{1}{\infty} = 0 \tag{17}$$

kde jsme právě použili výše napsané charakteristiky.

Odpověď: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n} = 0$ $\square$

Příklad 6 *Vypočtěte derivaci funkce dané předpisem*

$$f(x) = e^x(x^3 - x^2 + 6)$$

Řešení 6.
V tomto případě musíme nejprve vyřešit znaménko součinu, takže použijeme vzorec pro derivaci součinu, tedy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x[x^3 - x^2 + 6])' = \\ &= (e^x)'[x^3 - x^2 + 6] + e^x([x^3 - x^2 + 6])' = \\ &= e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x[(x^3)' - (x^2)' + (6)'] = \\ &= e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x(3x^2 - 2x + 0) = \\ &= e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x(3x^2 - 2x) \end{aligned} \tag{18}$$

Na první člen jsme pak aplikovali derivaci exponenciály a na druhý člen v závorce jsme museli opět aplikovat pravidlo pro derivaci součtu funkcí a poté pravidlo pro derivaci mocniny.

Odpověď: $f'(x) = (e^x[x^3 - x^2 + 6])' = e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x(3x^2 - 2x)$ $\square$

Příklad 7 *Určete maximum a minimum funkce f na uzavřeném intervalu J:*

$$f(x) = xln(x), \quad J = \langle e^{-2}; e\rangle$$

Řešení 7.
Pokud máme určit maximum a minimum na uzavřeném intervalu J, pak víme, že tento typ příkladu vždy vyřešíme pomocí Weierstrassovy věty, která zajišťuje, že na uzavřeném intervalu má spojitá funkce maximum a minimum, takže je stačí najít. Nejprve musíme určit podezřelé body z maxim a minim na celém definičním intervalu, takže vždy musíme řešit rovnici:

$$f'(x) = 0 \tag{19}$$

Rovnice (19) představuje tzv. nutné podmínky pro existenci extrému funkce jedné proměnné, takže řešení je:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xln(x))' \\ &= x'ln(x) + xln'(x) \\ &= ln(x) + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} \\ &= ln(x) + 1 \end{aligned} \tag{20}$$

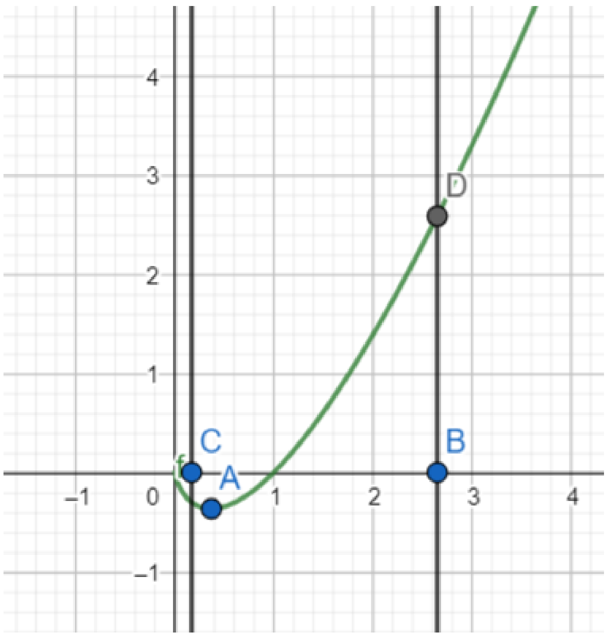
Nejprve jsme museli vypočítat první derivaci, na kterou jsme použili pouze derivaci součinu a poté vzorce základních derivací. Ve druhém kroku musíme za výsledek (20) dosadit nulu tedy:

$$\begin{aligned} ln(x) + 1 &= 0 \qquad | - 1 \\ ln(x) &= -1 \\ x &= e^{-1} \end{aligned} \tag{21}$$

Řešení (19) je tedy jediný podezřelý bod z extrému funkce, tedy e^{-1}. Musíme ověřit, zda tento bod patří do daného intervalu J, což vidíme, že ano, takže s ním budeme dále počítat. V posledním kroku potřebujeme spočítat pouze funkční hodnoty všech podezřelých bodů, tj. bodů, které jsou řešením rovnice (19) a vždy také hraničí body intervalu J, tedy:

$$\begin{aligned} f(e^{-2}) &= e^{-2}ln(e^{-2}) = e^{-2} \cdot (-2) = -\frac{2}{e^2} \\ f(e^{-1}) &= e^{-1}ln(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \\ f(e) &= eln(e) = e \cdot 1 = e \end{aligned} \tag{22}$$

Z výpočtu funkčních hodnot (22) stačí vybrat největší funkční hodnotu, která bude maximem, a nejmenší funkční hodnotu, která bude minimem. Vidíme, že nejmenší funkční hodnota je $-\frac{1}{e}$, a tedy minimum je v $\frac{1}{e}$, a největší funkční hodnota je e, a tedy maximum je v e.



Obr. 1: Grafické řešení

Pokud bychom danou funkci vynesli do grafu, pak by byl interval J vymezen body B a C. Vidíme, že řešením rovnice (19) je bod A, který leží v intervalu J, proto jsme jej zahrnuli do výpočtu. Vypočtené funkční hodnoty nám nyní jasně říkají, že maximum je v bodě D a minimum v bodě A.

Odpověď:

- Maximum funkce je v bode $x = e$
- Minimum funkce je v bode $x = e^{-1}$ $\square$

Příklad 8 *Najděte vázané extrémy funkce dvou proměnných f dané předpisem:*

$$ln(x^2 + y^2)$$

při vazební podmínce

$$9x^2 + y^2 = 9$$

Řešení 8.
Tento typ příkladu poznáme podle toho, že máme funkci dvou proměnných a ani x, ani y nelze vyjádřit z vazební podmínky, jinými slovy jsou vždy ve druhé mocnině. V tomto případě postupujeme tak, že vypočítáme první parciální derivace dané funkce, tedy:

$$\begin{aligned}
\partial_x(ln(x^2+y^2)) &= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\partial_x(x^2+y^2)\\
&= \frac{1}{x^2+y^2}2x = \frac{2x}{x^2+y^2}\\
\partial_y(ln(x^2+y^2)) &= \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\partial_y(x^2+y^2)\\
&= \frac{1}{x^2+y^2}2y = \frac{2y}{x^2+y^2}
\end{aligned} \tag{23}$$

Ve druhém kroku přepíšeme vazební podmínku na vazební funkci $g(x;y) = 9x^2 + y^2 - 9$ a opět spočítáme první parciální derivace, tedy:

$$\begin{aligned}
\partial_x(9x^2+y^2-9) = \partial_x(9x^2) + \partial_x(y^2) - \partial_x(9) = 9\cdot 2x + 0 - 0 = 18x\\
\partial_y(9x^2+y^2-9) = \partial_y(9x^2) + \partial_y(y^2) - \partial_x(9) = 0 + 2y - 0 = 2y
\end{aligned} \tag{24}$$

Ve třetím kroku musíme sestrojit tzv. Jacobiho determinant[3], který má předpis:

$$j(x;y) = \begin{vmatrix} \partial_x f(x;y) & \partial_y f(x;y) \\ \partial_x g(x;y) & \partial_y g(x;y) \end{vmatrix} \tag{25}$$

Do výrazu (25) dosadíme naše spočítané derivace (24) a (23), tedy:

$$\begin{aligned}
j(x;y) = \begin{vmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ 18x & 2y \end{vmatrix} &= \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot 2y - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot 18x = \\
= \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{36xy}{x^2+y^2} &= -\frac{32xy}{x^2+y^2}
\end{aligned} \tag{26}$$

V dalším kroku musíme vypočítat soustavu rovnic danou:

$$\begin{aligned}
j(x;y) = 0\\
g(x;y) = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

[3] Je to determinant prvních parciálních derivací, pomocí kterého určujeme podezřelé body s maxima resp. minima.

Po dosazení dostaneme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
-\frac{32xy}{x^2+y^2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -32xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \vee y = 0 \\
9x^2 + y^2 - 9 = 0 & \\
x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{1;2} = \pm 3 \\
y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 9x^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1;2} = \pm 1
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Vidíme, že řešením soustavy rovnic vzniklo několik spojených kořenů. Proto v dalším kroku určíme všechny možné varianty řešení, tj. podezřelé body z maxima, resp. minima:

$$
\begin{aligned}
A &= [0; -3] \\
B &= [0; 3] \\
C &= [-1; 0] \\
D &= [1; 0]
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Jakmile určíme podezřelé body z extrémů, je příklad téměř kompletní, protože máme zadání, které obsahuje jak x, tak y ve druhé mocnině a symbol rovná se, z čehož vyplývá, že takto zadaná vazební podmínka je kompaktní množina, přesně elipsa. Kdykoli je vazební podmínka dána jako kompaktní množina, pak příklad řešíme pomocí zobecněné Weirsstrasovy věty, která říká, že je-li funkce více proměnných spojitá na neprázdné kompaktní množině, pak na této množině nutně musí mít maximum i minimum. Funkce je spojitá a množina je neprázdná a kompaktní. Pak stačí spočítat funkční hodnoty v podezřelých bodech (29) a vybrat největší, resp. nejmenší:

$$
\begin{aligned}
A = [0; -3] \quad &\Longrightarrow \quad ln(0^2 + (-3)^2) = ln9 \\
B = [0; 3] \quad &\Longrightarrow \quad ln(0^2 + (3)^2) = ln9 \\
C = [-1; 0] \quad &\Longrightarrow \quad ln((-1)^2 + (0)^2) = ln1 \\
D = [1; 0] \quad &\Longrightarrow \quad ln(1^2 + (0)^2) = ln1
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Vidíme, že nejnižší hodnota je zastoupena 2 krát u C a D, takže funkce má 2 vázané minima a největší hodnota je zastoupena také 2 krát u A a B, takže funkce má 2 vázané maxima.

Odpověď: Funkce má lokální vázané minimum v bode $C = [-1; 0]$ a $D = [1; 0]$ a funkce má lokální vázané maximum v bode $A = [0; -3]$ a $B = [0; 3]$. $\square$

...